Les corrections détaillées :

Exercice 1

Question A

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f_1(x) = log_5(3x-4)}$, nous devons résoudre l'inéquation :

$$\begin{array}{ll|l} & \boldsymbol{3x-4>0} & \boldsymbol{+4} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{3x>4} & \boldsymbol{:3} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x>\frac{4}{3}} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que le domaine de définition est $\boldsymbol{D_{f_1}} = \left]\boldsymbol{\frac{4}{3}}\,;\,+\infty\right[$

Question B

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f_2(x) = \sqrt{5x-3}}$, nous devons résoudre l'inéquation :

$$\begin{array}{ll|l} & \boldsymbol{5x-3\geq 0} & \boldsymbol{+3} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{5x\geq 3} & \boldsymbol{:5} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x\geq\frac{3}{5}} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que le domaine de définition est $\boldsymbol{D_{f_2}} = \left[\boldsymbol{\frac{3}{5}}\,;\,+\infty\right[$

Question C

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f_3(x) = \frac{3x-4}{x^2+9x-10}}$, nous devons nous assurer que :

$$\begin{array}{ll|} & \boldsymbol{x^2+9x-10\neq 0} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{(x+10)(x-1)\neq 0} \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que le domaine de définition est $\boldsymbol{D_{f_3} = R \setminus \{-10\,;1\}}$

Question D

Le domaine de définie de la fonction définie par $\boldsymbol{f_4(x) = x^2+3x-4}$ est $\boldsymbol{D_{f_4} = R}$.

Exercice 2

Question A

Pour déterminer les zéros de la fonction $\boldsymbol{f_1(x) = log_2(3x-5)}$, nous devons résoudre l'équation

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boldsymbol{log_2(3x-5) = 0} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{2^0 = 3x-5} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{1 = 3x-5} & \color{red}{+5} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{6 = 3x} & \color{red}{:3} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{2 = x} &
\end{array}
$$

Cette fonction possède un zéro égal à 2. Attention à vérifier que cette valeur appartient au domaine de définition, ce qui est le cas dans cette situation précise.

Question B

Pour déterminer les zéros de la fonction $\boldsymbol{f_2(x) = \sqrt{4-3x}}$, nous devons résoudre l'équation

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boldsymbol{\sqrt{4-3x} = 0} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{4-3x = 0} & \color{red}{-4} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{-3x = -4} & \color{red}{:(-3)} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{x = \frac{4}{3}} & \color{red}{:3}
\end{array}
$$

Cette fonction possède un zéro égal à $\frac{4}{3}$. Attention à vérifier que cette valeur appartient au domaine de définition, ce qui est le cas dans cette situation précise.

Question C

Pour déterminer les zéros de la fonction $\boldsymbol{f_3(x)} = \frac{4x+3}{3x-1}$, nous devons résoudre l'équation

$$
\begin{aligned}
& \frac{4x+3}{3x-1} = 0 && \Big| \cdot (3x-1) \\
\Leftrightarrow \quad & 4x+3 = 0 && \Big| -3 \\
\Leftrightarrow \quad & 4x = -3 && \Big| :4 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\frac{3}{4} && \Big| :3
\end{aligned}
$$

Cette fonction possède un zéro égal à $-\frac{3}{4}$. Attention à vérifier que cette valeur appartient au domaine de définition, ce qui est le cas dans cette situation précise.

Question D

Pour déterminer les zéros de la fonction $\boldsymbol{f_4(x)} = \frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$, nous devons résoudre l'équation

$$
\begin{aligned}
& \frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12} = 0 && \Big| \cdot (x^2-x-12) \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^2+5x-3 = 0 && \Big| -3
\end{aligned}
$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre cette équation avec

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = -3$$

Le discriminant est égal à $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$

Puisque cette valeur est positive, notre équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \cdot 2} = -3$$

Cette fonction possède deux zéros potentiels égaux à -3 et $\frac{1}{2}$. Attention, nous pouvons constater que la valeur -3 n'appartient pas au domaine de définition et nous ne pouvons pas considérer celle-ci comme un zéro de notre fonction.

Nous pouvons ainsi en conclure que notre fonction a un seul zéro égal à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Question A

Soit la fonction définie par l'expression $\boldsymbol{f_1(x) = log_3(2x+1) - log_3(2-3x)}$

Pour déterminer le domaine de définition de cette fonction, nous devons résoudre le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{2x+1>0} \\ \mathbf{2-3x>0} \end{cases}$$

Ce système est équivalent aux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{2x>-1} \\ \mathbf{-3x>-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x>-\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{x<\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que le domaine de cette fonction est défini sur l'ensemble $\boldsymbol{D_{f_1}} = \left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right[$.

Question B

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f_2(x)} = \frac{\sqrt{3x+5}}{2x+3}$, nous devons prendre en compte deux conditions :

$$\begin{cases} \mathbf{3x+5\geq 0} \\ \mathbf{2x+3\neq 0} \end{cases}$$

Nous pouvons transformer ces deux conditions ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{3x\geq -5} \\ \mathbf{2x\neq -3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x\geq -\frac{5}{3}} \\ \boldsymbol{x\neq -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que le domaine de cette fonction est défini sur l'ensemble $\boldsymbol{D_{f_2}} = \left[-\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[\setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Question C

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f_3(x) = \frac{2x-5}{2x(x+3)(1-2x)}$, nous devons nous assurer que le dénominateur n'est pas nul :

$$2x(x+3)(1-2x) \neq 0$$

Il est ainsi nécessaire de tenir compte des trois conditions suivantes :

$2x \neq 0$	$:2$		$x + 3 \neq 0$	-3		$1 - 2x \neq 0$	$+2x$
$x \neq 0$		$\Leftrightarrow$	$x \neq -3$		$\Leftrightarrow$	$1 \neq 2x$	$:2$
					$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} \neq x$	

Nous pouvons en déduire que le domaine de cette fonction est défini sur l'ensemble $D_{f_3} = R \setminus \left\{-3\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.

Question D

Le domaine de définition de la fonction exponentielle définie par $f_4(x) = 3^{4x-1}$ est l'ensemble R. En effet, l'expression 3^{4x-1} peut être calculée, quel que soit la valeur attribuée à la variable **x**.

Exercice 4

Pour déterminer la préimage de 5 par la fonction $\boldsymbol{f(x) = log_2(3x-1) + log_2(x+1)}$, nous devons résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{log_2(3x-1) + log_2(x+1) = 5} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{log_2[(3x-1)(x+1)] = 5} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{log_2(3x^2+3x-x-1) = 5} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{log_2(3x^2+2x-1) = 5} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{2^5 = 3x^2+2x-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{32 = 3x^2+2x-1} && \Big|\ \boldsymbol{-32} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{0 = 3x^2+2x-33}
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre cette équation avec

$$\boldsymbol{a = 3 \qquad b = 2 \qquad c = -33}$$

Le discriminant est égal à $\Delta = \boldsymbol{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33) = 400}$

Puisque cette valeur est positive, notre équation a deux solutions distinctes :

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-2+\sqrt{400}}{2 \cdot 3} = 3 \qquad\qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{400}}{2 \cdot 3} = -\frac{11}{3}}$$

Cette fonction possède deux préimages potentielles égales à $-\frac{11}{3}$ et 3. Attention, nous pouvons constater que la valeur $-\frac{11}{3}$ n'appartient pas au domaine de définition et nous ne pouvons pas considérer celle-ci comme une préimage de notre fonction.

Exercice 5

Pour déterminer l'image de -2 par la fonction $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}}$, nous devons évaluer cette fonction en $x = -2$:

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{f(-2) = \frac{3 \cdot (-2) - 1}{(-2)^2 + 4}} \\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{f(-2) = -\frac{7}{8}}
\end{aligned}$$

L'image de -2 par la fonction f est égale à $-\frac{7}{8}$.

Exercice 6

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-5x-14}}{\boldsymbol{x^2+5x+6}}$, nous devons nous assurer que :

$$
\begin{array}{rl|}
 & \boldsymbol{x^2 + 5x + 6 \neq 0} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{(x+3)(x+2) \neq 0}
\end{array}
$$

Nous pouvons en conclure que le domaine de définition est $\boldsymbol{D_f = R \setminus \{-3\,;-2\}}$

Exercice 7

Pour déterminer les zéros de la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-5x-14}}{\boldsymbol{x^2+5x+6}}$, nous devons résoudre l'équation

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boldsymbol{\frac{x^2-5x-14}{x^2+5x+6} = 0} & \color{red}{\cdot\,\boldsymbol{(x^2+5x+6)}} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{x^2 - 5x - 14 = 0} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{(x+2)(x-7) = 0} &
\end{array}
$$

Cette fonction possède deux zéros potentiels égaux à -2 et 7. Attention, nous pouvons constater que la valeur -2 n'appartient pas au domaine de définition et nous ne pouvons pas considérer celle-ci comme un zéro de notre fonction.

Nous pouvons ainsi en conclure que notre fonction a un seul zéro égal à 7.

Exercice 8

Pour déterminer l'image de -1 par la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-5x-14}}{\boldsymbol{x^2+5x+6}}$, nous devons évaluer cette fonction en $x = -1$:

$$
\begin{array}{rl}
 & \boldsymbol{f(-1) = \frac{(-1)^2 - 5\cdot(-1) - 14}{(-1)^2 + 5\cdot(-1) + 6}} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{f(-1) = -\frac{8}{2}} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{f(-1) = -4}
\end{array}
$$

L'image de -1 par la fonction f est égale à -4.

Exercice 9

Pour déterminer la préimage de -2 par la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2-5x-14}{x^2+5x+6}$, nous devons résoudre l'équation

$$\begin{array}{rll} & \dfrac{x^2-5x-14}{x^2+5x+6} = -2 & \cdot\,(x^2+5x+6) \\ \Leftrightarrow & x^2-5x-14 = -2x^2-10x-12 & \\ \Leftrightarrow & 3x^2+5x-2 = 0 & \end{array}$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre cette équation avec

$$a = 3 \qquad b = 5 \qquad c = -2$$

Le discriminant est égal à $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$

Puisque cette valeur est positive, notre équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} \qquad\qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot 3} = -2$$

Cette fonction possède deux préimages potentielles égales à -2 et $\frac{1}{3}$. Attention, nous pouvons constater que la valeur -2 n'appartient pas au domaine de définition et nous ne pouvons pas considérer celle-ci comme une préimage de notre fonction.