Fiche théorique : La méthode par combinaisons linéaires

Exemple

Pierre se rend dans la boulangerie se situant à côté de chez lui et achète deux croissants et trois pains au chocolat. Il paie, au total, la somme de CHF 6.90.

Sa voisine Nathalie achète, dans la même boulangerie, trois croissants et deux pains au chocolat pour un montant total de CHF 6,60.

Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat ?

Nous pouvons constater à la lecture de cet énoncé que deux inconnues sont recherchées. En effet, il est demandé de trouver le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat.

La première étape consiste à définir les inconnues :

$\boldsymbol{x}$ **:** ***Le prix d'un croissant.***

$\boldsymbol{y}$ **:** ***Le prix d'un pain au chocolat.***

Le problème ci-dessous fournit également deux informations, que nous pouvons traduire par le système de deux équations à deux inconnues ci-dessous :

(1) $\mathbf{2x + 3y = 6,9}$

(2) $\mathbf{3x + 2y = 6,6}$

Ce système peut s'illustrer ainsi :

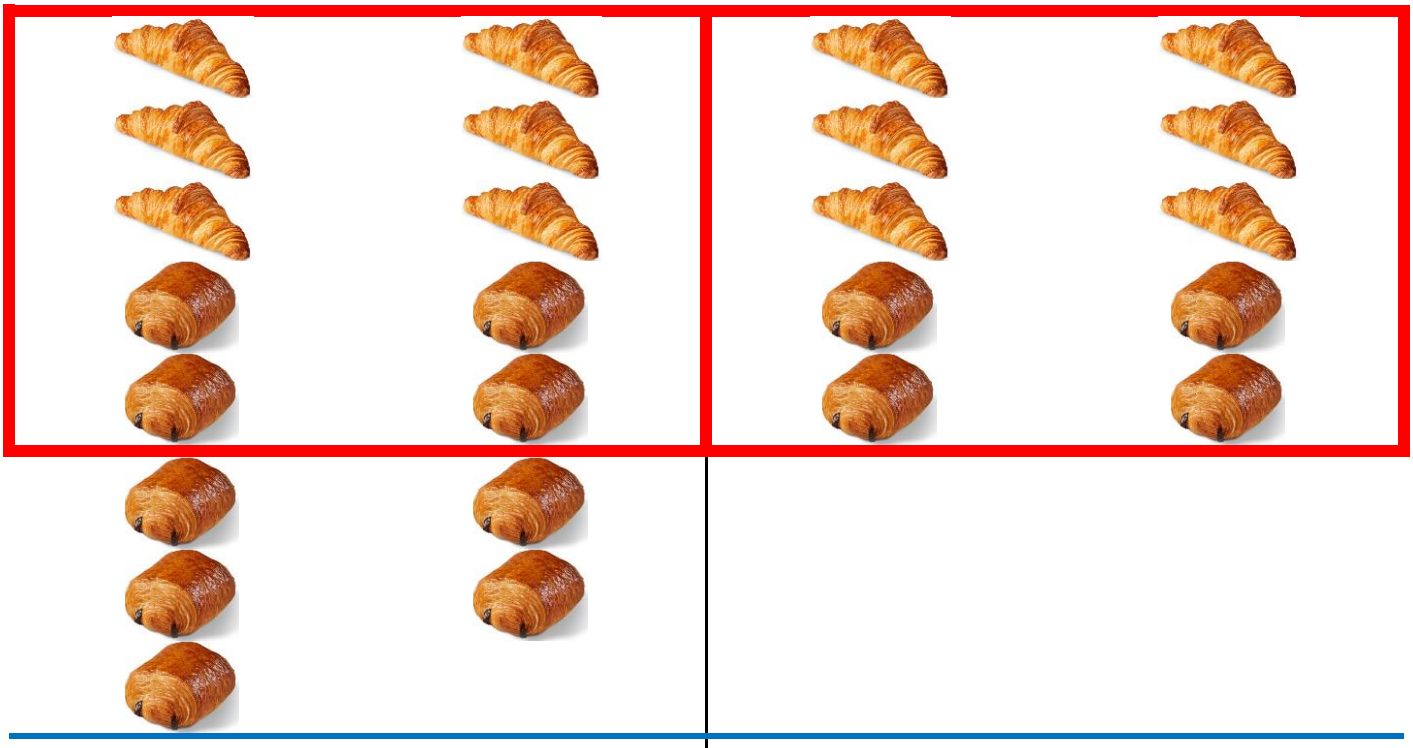
Pierre  **CHF 6,90**

Nathalie  **CHF 6,60**

Avec une telle configuration, il est difficile d'opposer ces deux situations pour déterminer la valeur de l'une des inconnues, à savoir le prix d'un croissant ou d'un pain au chocolat.

En revanche, nous pouvons utiliser la deuxième règle d'équivalence sur les équations pour amplifier ces achats et nous permettre de les comparer.

Pierre	Nathalie



CHF 20.70	CHF 13.20

Nous pouvons, par comparaison, en déduire que 5 pains au chocolat coûtent CHF 7.50 et donc en conclure qu'un pain au chocolat est vendu au prix de CHF 1.50.

Mathématiquement, nous avons transformé notre système initial en un système équivalent nous permettant de déterminer rapidement la valeur de l'une des inconnues.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6{,}90 \\ 3x + 2y = 6{,}60 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 9y = 20{,}70 \\ 6x + 4y = 13{,}20 \end{cases} \; -$$

<u>Remarque</u>

Nous avons multiplié par trois la première équation et par deux la seconde équation, afin d'obtenir un nombre équivalent de « x » sur les deux équations, permettant ainsi de facilement les comparer et d'en déduire la valeur d'une inconnue.

Attention, deux inconnues sont recherchées et il est ainsi impératif de déterminer la valeur de **x** représentant le prix d'un croissant.

Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'une des équations de notre système initial et remplacer la variable **y** par **1,50**.

$$\begin{array}{ll|l} & \mathbf{2x+3\cdot 1,50=6,90} & \\ \Leftrightarrow & \mathbf{2x+4,5=6,90} & \mathbf{-4,5} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{2x=2,4} & \mathbf{:2} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x=1,2} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que, dans cette boulangerie, un croissant coûte $\mathbf{1,20}$ et un pain au chocolat est vendu au prix de $\mathbf{1,50}$.

Exemple

Résoudre, à l'aide de la méthode par combinaisons linéaires, le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 2x-3y=-13 \end{cases}$$

Nous pouvons multiplier la première équation par 2 et la seconde équation par 3, afin d'obtenir un nombre similaire de x sur les deux équations :

$$\begin{cases} 6x+8y=12 \\ 6x-9y=-39 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, nous obtenons une équations à une inconnue :

$$\begin{array}{c} \begin{cases} \mathbf{6x+8y=12} \\ \mathbf{6x-9y=-39} \end{cases} \quad - \\ \hline \mathbf{17y=51} \end{array}$$

Nous pouvons aisément en déduire que si $\mathbf{17y=51}$ alors $\mathbf{y=3}$.

Attention, la seconde inconnue doit être déterminée. Nous pouvons utiliser la première équation et remplacer la variable y par la valeur 3. Nous avons que :

$$\begin{array}{rl|l} & \mathbf{3x+4\cdot 3=6} & \\ \Leftrightarrow & \mathbf{3x+12=6} & \mathbf{-12} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{3x=-6} & \mathbf{:3} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x=-2} & \end{array}$$

La solution de notre système d'équations est l'ensemble $S=\{(-2\,;3)\}$