

Fiche théorique : Les fonctions diverses

Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments qui ont une image par la fonction.

Remarques

Le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ est l'ensemble des nombres réels. En effet, un résultat pourra être obtenu si nous souhaitons calculer l'expression $f(x)$ quelle que soit la valeur que nous attribuons à la variable x .

Plus généralement, le domaine de définition d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombre réels.

L'ensemble des nombres réels représente également le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = 3^x$. En effet, cette fonction peut être évaluée quelle que la valeur donnée à la variable x .

D'une manière générale, le domaine de définition d'une fonction exponentielle est l'ensemble des nombre réels.

Exercice introductif

Complétez le tableau des valeurs ci-dessous. Arrondissez, si besoin, vos résultats au centième.

x	$f(x) = \log_2(x)$
-2	
-1	
0	
$\frac{1}{8}$	
2	
π	

Nous pouvons observer que la fonction $f(x) = \log_2(x)$ est définie uniquement si $x > 0$.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition de la fonction f est l'intervalle $]0; +\infty[$.

Domaine de définition d'une fonction logarithmique

Soit une fonction logarithmique de la forme

$$f(x) = \log_b(A) \quad \text{avec } b \geq 0$$

où **A** est une expression algébrique.

Alors cette fonction est définie, si l'expression algébrique **A** est d'un signe strictement positif.

Exemple

Le domaine de définition de la fonction logarithmique définie par $f(x) = \log_3(2x + 1)$ est l'ensemble des valeurs respectant la condition $2x + 1 > 0$.

Par la résolution de cette inéquation, nous pouvons en déduire que le domaine de définition, noté D_f , est l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice introductif

Complétez le tableau des valeurs ci-dessous. Arrondissez, si besoin, vos résultats au centième.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
-2	
-1	
0	
$\frac{4}{9}$	
4	
1600	

Nous pouvons observer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie uniquement si $x \geq 0$.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition de la fonction f est l'intervalle $[0; +\infty[$.

Domaine de définition d'une fonction racine carrée

Soit une fonction racine carrée de la forme

$$f(x) = \sqrt{A}$$

où **A** est une expression algébrique.

Alors cette fonction est définie, si l'expression algébrique **A** est d'un signe positif ou nul.

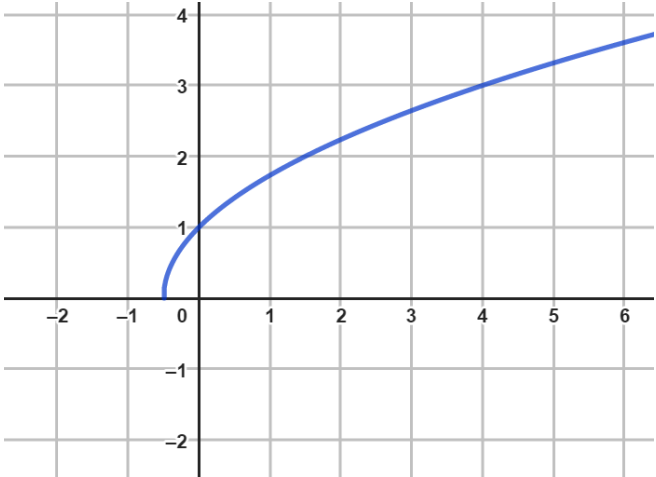
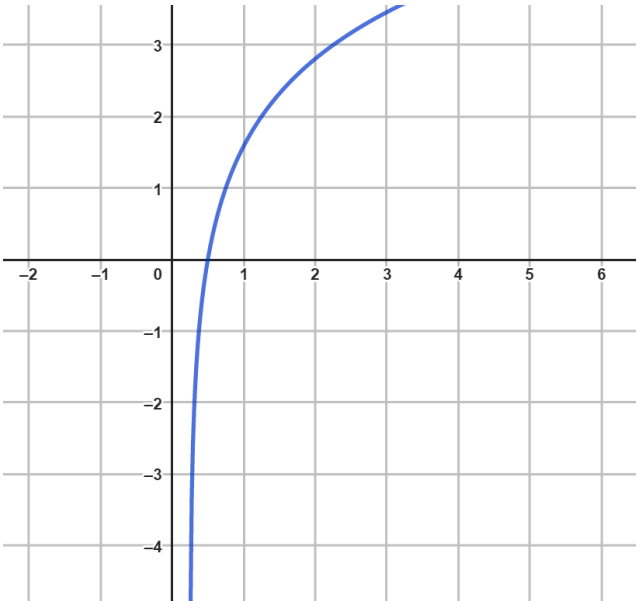
Exemple

Le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x+2}$ est l'ensemble des valeurs respectant la condition $3x+2 \geq 0$.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition, noté D_f , est l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

Remarques

Nous pouvons observer, à l'aide des représentations graphiques ci-dessous, la cohérence des propos mentionnés précédemment.

$f(x) = \sqrt{2x+1}$	$g(x) = \log_2(4x-1)$
Cette fonction est définie si $2x+1 \geq 0$	Cette fonction est définie si $4x-1 > 0$
Ainsi $D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$	Ainsi $D_g = \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$
	

Domaine de définition d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction définie par une fraction rationnelle, c'est-à-dire une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynomiales.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques.

Cette fonction est définie, si l'expression algébrique $Q(x)$ est non-nulle, afin d'éviter une division par 0.

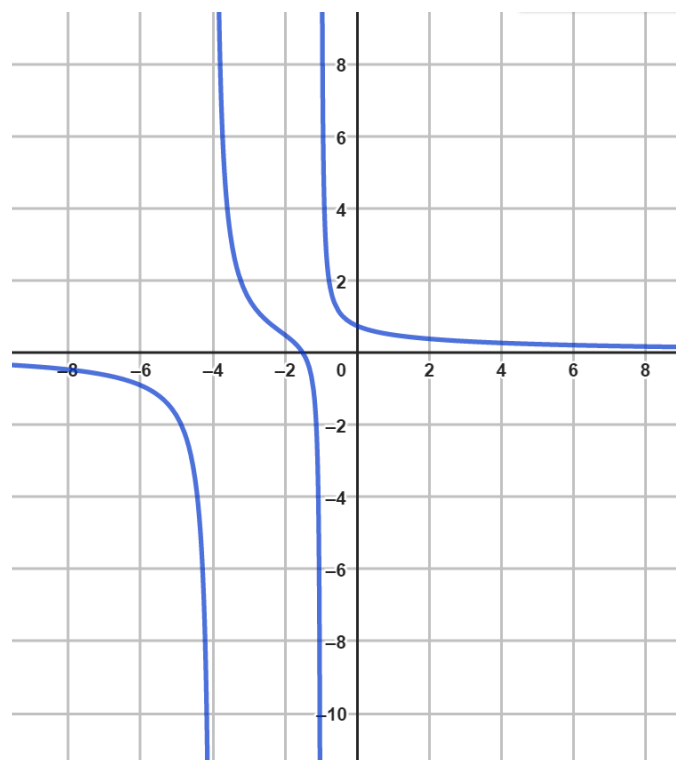
Exemple

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5x+4}$, il faut s'assurer du fait que le dénominateur défini par l'expression $x^2 + 5x + 4$ ne soit pas nul.

En utilisant la 4^e identité remarquable, nous pouvons factoriser l'expression $x^2 + 5x + 4$ par l'expression factorisée $(x + 4)(x + 1)$ qui nous permet aisément d'affirmer que celle-ci sera différente de 0, si la valeur de la variable x est différente de -4 ou de -1.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition est donné par l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \{-4; -1\}$.

Ce fait se constate en observant le graphique de cette fonction.



Les zéros d'une fonction

Les zéros d'une fonction f sont les valeurs qu'il faut donner à la variable x pour que la fonction s'annule.

Déterminer les zéros d'une fonction revient ainsi à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Remarque

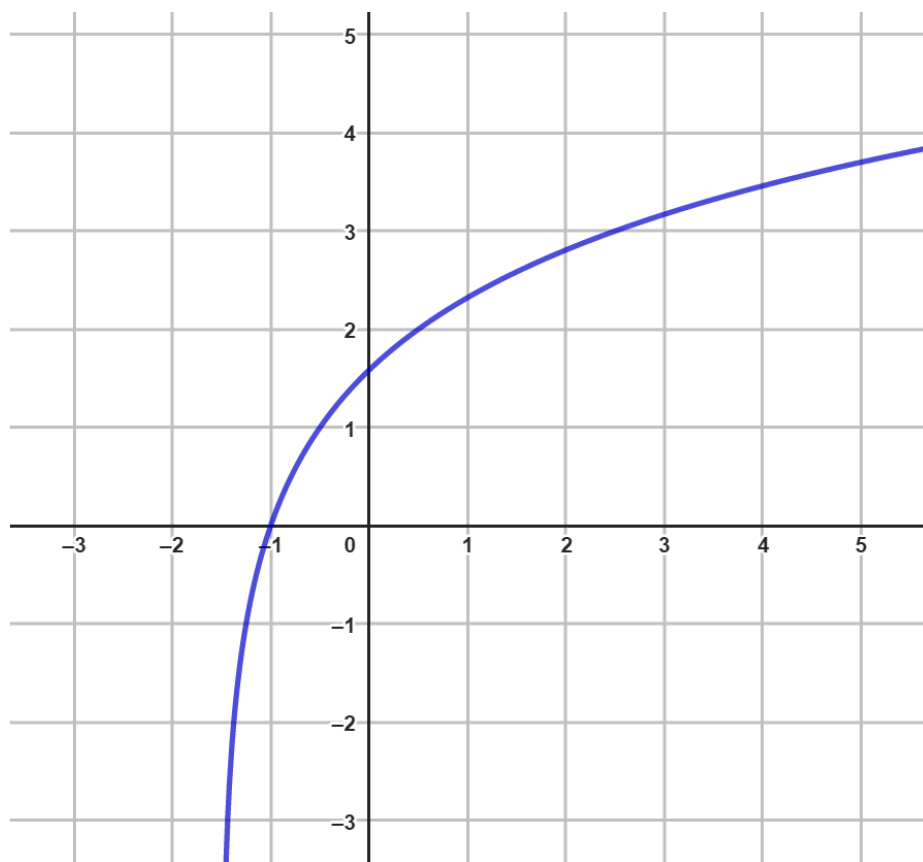
Les zéros d'une fonction f sont les valeurs en laquelle la représentation graphique de la fonction f coupe l'axe des abscisses.

Exemple

Pour déterminer les zéros de la fonction définie par $f(x) = \log_2(2x + 3)$, il faut résoudre l'équation $\log_2(2x + 3) = 0$.

Cette équation n'a qu'une solution donnée par -1 .

Nous savons ainsi que la représentation de la fonction coupe l'axe des abscisses en la valeur -1 . Ce fait peut être observé à l'aide du graphique de cette fonction ci-dessous :



Exemples

Déterminez le domaine de définition et les zéros éventuels des fonctions ***f*** et ***g*** définies par les expressions fonctionnelles ci-dessous :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 4}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{4 - 5x}}{x + 2}$$