Fiche théorique : Les fonctions diverses

Domaine de définition d'une fonction
Le domaine de définition d'une fonction $\boldsymbol{f}$ est l'ensemble des éléments qui ont une image par la fonction.

Remarques

Le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x - 5}$ est l'ensemble des nombres réels. En effet, un résultat pourra être obtenu si nous souhaitons calculer l'expression $\boldsymbol{f(x)}$ quelle que soit la valeur que nous attribuons à la variable $\mathbf{x}$.

Plus généralement, le domaine de définition d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombre réels.

L'ensemble des nombres réels représente également le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$. En effet, cette fonction peut être évaluée quelle que la valeur donnée à la variable $\mathbf{x}$.

D'une manière générale, le domaine de définition d'une fonction exponentielle est l'ensemble des nombre réels.

Exercice introductif

Complétez le tableau des valeurs ci-dessous. Arrondissez, si besoin, vos résultats au centième.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = log_2(x)}$
$\mathbf{-2}$	$---$
$\mathbf{-1}$	$---$
$\mathbf{0}$	$---$
$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{-3}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{\pi}$	$\mathbf{\sim 1,65}$

Nous pouvons observer que la fonction $\boldsymbol{f(x) = log_2(x)}$ est définie uniquement si $\boldsymbol{x > 0}$.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition de la fonction $\boldsymbol{f}$ est l'intervalle $]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$.

Domaine de définition d'une fonction logarithmique
Soit une fonction logarithmique de la forme $$\boldsymbol{f(x) = log_b(A) \quad avec\ b \geq 0}$$ où ***A*** est une expression algébrique. Alors cette fonction est définie, si l'expression algébrique ***A*** est d'un signe strictement positif.

<u>Exemple</u>

Le domaine de définition de la fonction logarithmique définie par $\boldsymbol{f(x) = log_3(2x+1)}$ est l'ensemble des valeurs respectant la condition $\boldsymbol{2x+1 > 0}$.

$$\begin{array}{rl|l} & 2x+1>0 & \\ \Leftrightarrow & 2x > -1 & :2 \\ \Leftrightarrow & x > -\frac{1}{2} & \end{array}$$

Par la résolution de cette inéquation, nous pouvons en déduire que le domaine de définition, noté D_f, est l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

<u>Exercice introductif</u>

Complétez le tableau des valeurs ci-dessous. Arrondissez, si besoin, vos résultats au centième.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$
$\boldsymbol{-2}$	$---$
$\boldsymbol{-1}$	$---$
$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{\frac{4}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$
$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{1600}$	$\boldsymbol{40}$

Nous pouvons observer que la fonction $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ est définie uniquement si $\boldsymbol{x \geq 0}$.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition de la fonction $\boldsymbol{f}$ est l'intervalle $[\boldsymbol{0}\ ;\ +\infty[$.

Domaine de définition d'une fonction racine carrée
Soit une fonction racine carrée de la forme $$f(x) = \sqrt{A}$$ où $\boldsymbol{A}$ est une expression algébrique. Alors cette fonction est définie, si l'expression algébrique $\boldsymbol{A}$ est d'un signe positif ou nul.

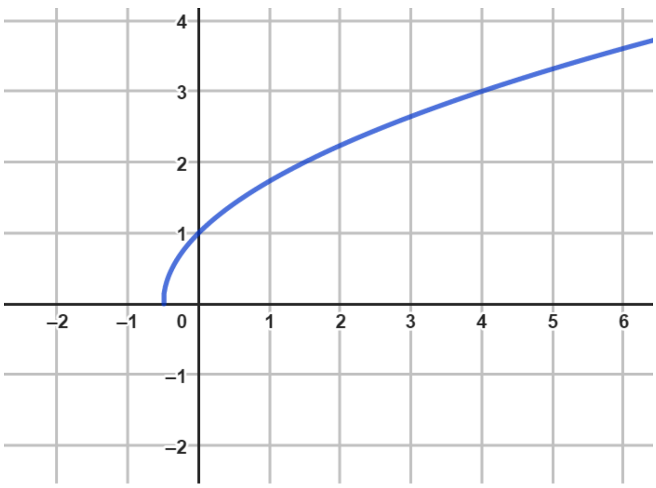
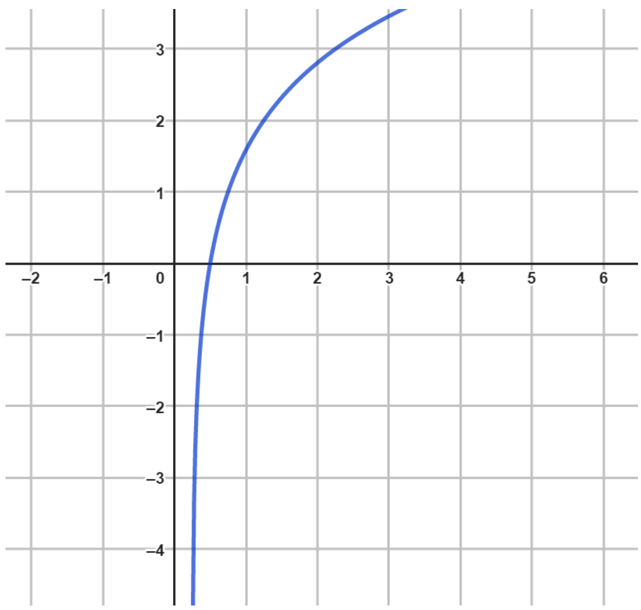
Exemple

Le domaine de définition de la fonction définie par $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\boldsymbol{3x+2}}$ est l'ensemble des valeurs respectant la condition $\mathbf{3x + 2 \geq 0.}$

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition, noté D_f, est l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

Remarques

Nous pouvons observer, à l'aide des représentations graphiques ci-dessous, la cohérence des propos mentionnés précédemment.

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x+1}}$	$\boldsymbol{g(x) = log_2(4x-1)}$
Cette fonction est définie si $\mathbf{2x + 1 \geq 0}$	Cette fonction est définie si $\mathbf{4x - 1 > 0}$
Ainsi $\boldsymbol{D_f} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ +\infty\right[$	Ainsi $\boldsymbol{D_g} = \left]\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ ;\ +\infty\right[$
 	

Domaine de définition d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction définie par une fraction rationnelle, c'est-à-dire une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynomiales.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

où $\boldsymbol{P(x)}$ et $\boldsymbol{Q(x)}$ sont des expressions algébriques.

Cette fonction est définie, si l'expression algébrique $\boldsymbol{Q(x)}$ est non-nulle, afin d'éviter une division par 0.

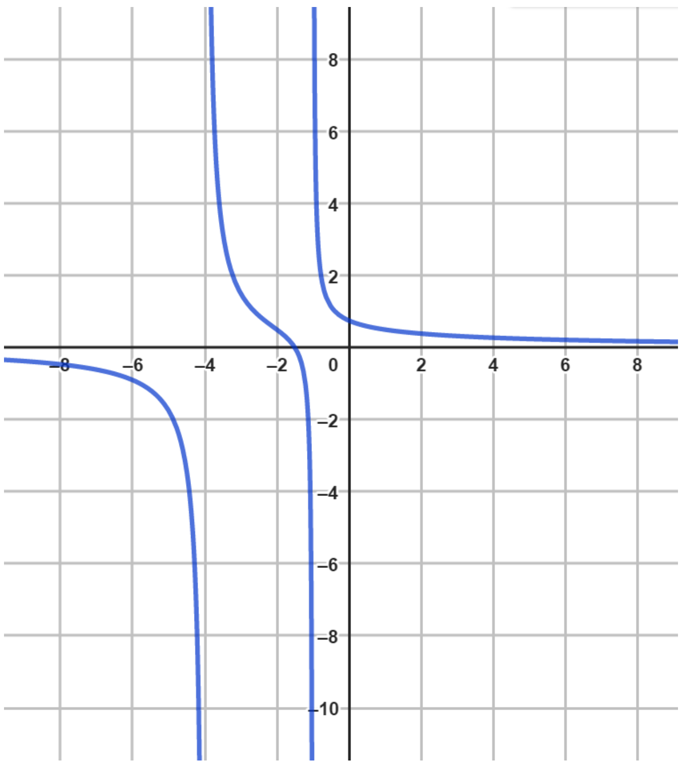
<u>Exemple</u>

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5x+4}}$, il faut s'assurer du fait que le dénominateur défini par l'expression $\boldsymbol{x^2 + 5x + 4}$ ne soit pas nul.

En utilisant la 4^e identité remarquable, nous pouvons factoriser l'expression $\boldsymbol{x^2 + 5x + 4}$ par l'expression factorisée $\boldsymbol{(x + 4)(x + 1)}$ qui nous permet aisément d'affirmer que celle-ci sera différente de 0, si la valeur de la variable **x** est différente de -4 ou de -1.

Nous pouvons en déduire que le domaine de définition est donné par l'ensemble
$\boldsymbol{R \setminus \{-4; -1\}}$.

Ce fait se constate en observant le graphique de cette fonction.



Les zéros d'une fonction
Les zéros d'une fonction $\boldsymbol{f}$ sont les valeurs qu'il faut donner à la variable $\boldsymbol{x}$ pour que la fonction s'annule. Déterminer les zéros d'une fonction revient ainsi à résoudre l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

<u>Remarque</u>

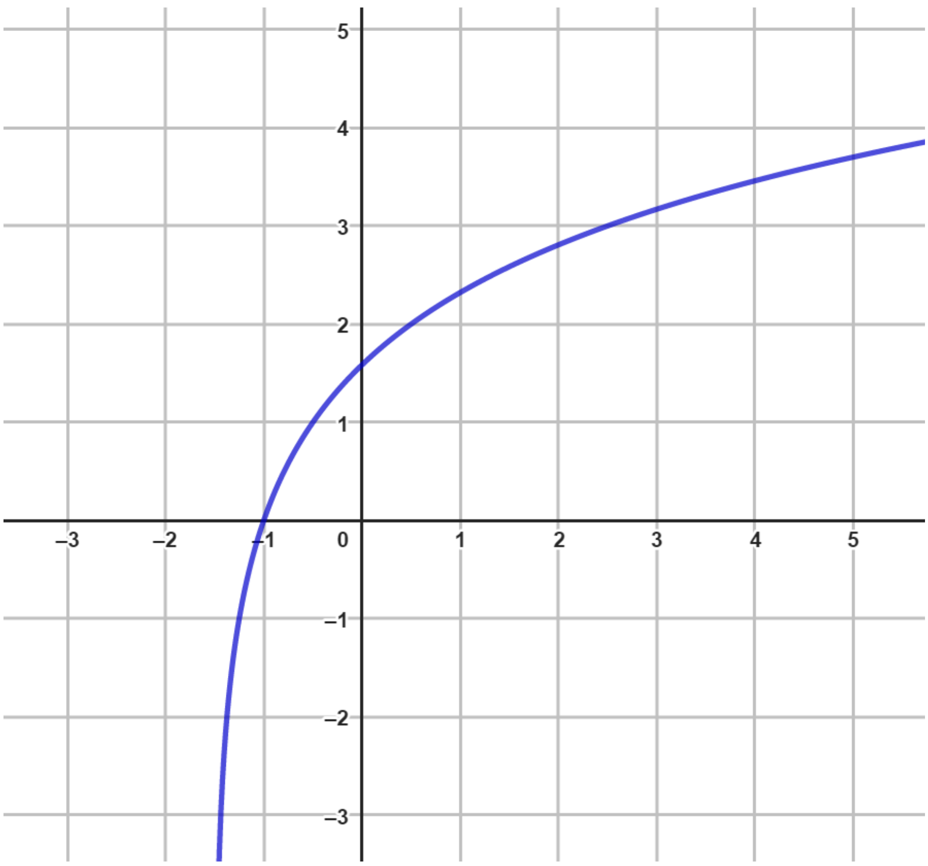
Les zéros d'une fonction $\boldsymbol{f}$ sont les valeurs en laquelle la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{f}$ coupe l'axe des abscisses.

<u>Exemple</u>

Pour déterminer les zéros de la fonction définie par $\boldsymbol{f(x) = log_2(2x+3)}$, il faut résoudre l'équation $\boldsymbol{log_2(2x+3) = 0}$.

Cette équation n'a qu'une solution donnée par $\boldsymbol{-1}$.

Nous savons ainsi que la représentation de la fonction coupe l'axe des abscisses en la valeur $\boldsymbol{-1}$. Ce fait peut être observé à l'aide du graphique de cette fonction ci-dessous :



Exemples

Déterminez le domaine de définition et les zéros éventuels des fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ définies par les expressions fonctionnelles ci-dessous :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad\qquad g(x) = \frac{\sqrt{4-5x}}{x+2}$$

Pour la fonction f

$$\begin{aligned} & \frac{2x+3}{x^2-4} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x+3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x = -3 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

La fonction f a un zéro en $-\frac{3}{2}$

Pour la fonction g

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4-5x}}{x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{4-5x} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 4-5x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 = 5x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4}{5} = x \end{aligned}$$

La fonction g a un zéro en $\frac{4}{5}$