

Fiche théorique : La méthode par substitution

Exemple

Le maillot de l'équipe Suisse de football coûte CHF 50 de plus que le short.

Ensemble, les deux accessoires sont vendus au prix de CHF 128.

Quel est le prix du maillot, réciproquement du short de l'équipe Suisse ?

Nous pouvons constater à la lecture de cet énoncé que deux inconnues sont recherchées. En effet, il est demandé de trouver le prix du maillot de l'équipe de Suisse et de son short.

La première étape consiste ainsi à définir les inconnues :

x : Le prix du maillot de l'équipe de Suisse de football.

y : Le prix du short de l'équipe de Suisse de football.

Le problème ci-dessous fournit également deux informations, utiles pour déterminer les valeurs de ces deux inconnues.

(1) $x = y + 50$

(2) $x + y = 128$

Nous avons ainsi pu traduire notre problème initial en un système de deux équations à deux inconnues. Mais comment résoudre celui-ci ?

Définition

Le terme substituer signifie remplacer quelque chose par quelque chose d'autre.

En observant attentivement ce système d'équations, nous pouvons observer que la première équation nous indique que $x = y + 50$.

Nous allons ainsi pouvoir remplacer (substituer) la variable x présente dans la seconde équation par l'expression $y + 50$ et obtenir l'équation suivante :

$$y + 50 + y = 128$$

Ce principe s'appelle la substitution et nous permet de transformer, par exemple, un système de deux équations à deux inconnues, en une équation à une seule inconnue.

La résolution de cette simple équation nous permet de trouver la valeur d'une des deux inconnues. En effet :

$$\begin{array}{lcl} y + 50 + y = 128 & & \\ \Leftrightarrow 2y + 50 = 128 & & -50 \\ \Leftrightarrow 2y = 78 & & :2 \\ \Leftrightarrow y = 36 & & \end{array}$$

Pour trouver la valeur de la seconde inconnue, vous pouvez utiliser l'équation $x = y + 50$ et y par la valeur ci-dessus. Vous obtenez :

$$\begin{aligned} x &= 36 + 50 \\ \Leftrightarrow x &= 86 \end{aligned}$$

Exemple

Résoudre, à l'aide de la méthode par substitution, le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

La première équation peut s'écrire sous la forme $x = 2y + 1$

Nous pouvons utiliser cette relation pour substituer la variable x par l'expression $2y + 1$ dans la seconde équation. Nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{array}{lcl} 2 \cdot (2y + 1) - 3y = 5 & & \\ \Leftrightarrow 4y + 2 - 3y = 5 & & \\ \Leftrightarrow y + 2 = 5 & & -2 \\ \Leftrightarrow y = 3 & & \end{array}$$

Pour trouver la valeur de la seconde inconnue, nous pouvons utiliser l'équation $x = 2y + 1$ et remplacer y par la valeur ci-dessus. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 3 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= 7 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(7 ; 3)\}$

Exemple

Résoudre, à l'aide de la méthode par substitution, le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

La première équation peut s'écrire sous la forme $y = 2x - 1$

Nous pouvons utiliser cette relation pour substituer la variable y par l'expression $2x - 1$ dans la seconde équation. Nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{array}{lcl} 3x - 2 \cdot (2x - 1) = -1 & & \\ \Leftrightarrow 3x - 4x + 2 = -1 & & \\ \Leftrightarrow -x + 2 = -1 & & -2 \\ \Leftrightarrow -x = -3 & & \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow x = 3 & & \end{array}$$

Pour trouver la valeur de la seconde inconnue, nous pouvons utiliser l'équation $y = 2x - 1$ et remplacer x par la valeur ci-dessus. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 3 - 1 \\ \Leftrightarrow y &= 5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(3; 5)\}$