Fiche théorique : Les équations du premier degré

Exercice introductif

Tentez de résoudre, en 3 minutes, les équations ci-dessous :

$A)\quad x+4=7$

$B)\quad 2x=16$

$C)\quad 2x+3=9$

$D)\quad 4x+3=7x-2$

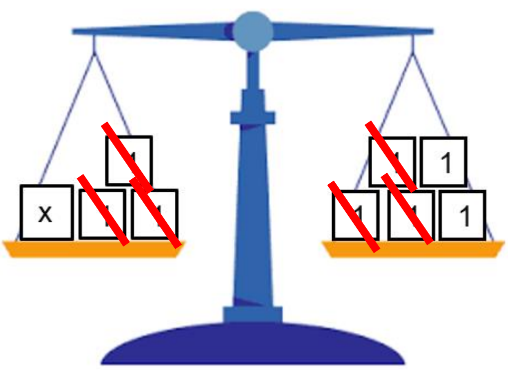
Ces équations représentent bien des équations du premier degré. Il est possible de déterminer, par tâtonnement par exemple, les solutions des trois premières équations. Cette technique est, en revanche, moins efficace pour résoudre la quatrième équation, dont la résolution s'avère plus complexe.

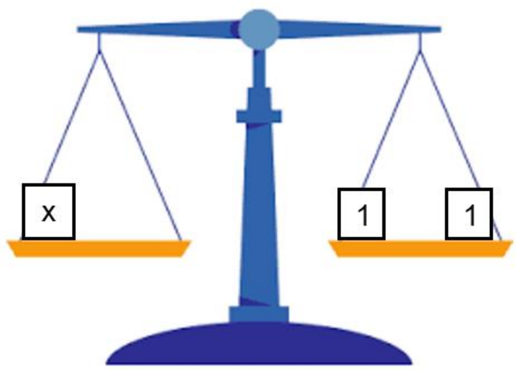
Nous allons introduire deux règles d'équivalence qui nous permettront de résoudre, par la suite, tous types d'équations du premier degré.

Première règle d'équivalence
Une équation est équivalente à une autre équation, si l'on passe de l'une à l'autre en additionnant ou soustrayant la même valeur des deux côtés de l'égalité.

Illustration

$\boldsymbol{x+3=5} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x=2}$

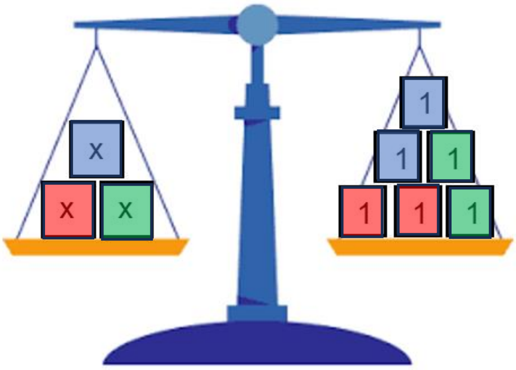


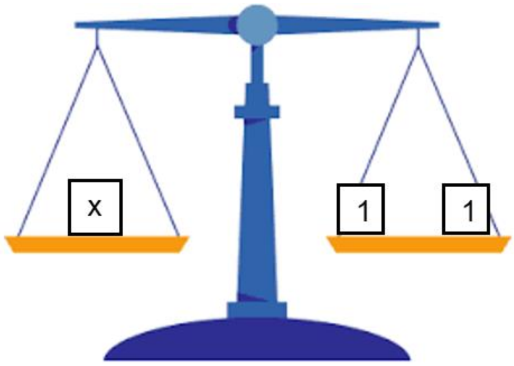


Deuxième règle d'équivalence
Une équation est équivalente à une autre équation, si l'on passe de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant la même quantité des deux côtés de l'égalité.

<u>Illustration</u>

$$3x = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2$$





Appliquons ces deux règles sur les questions posées précédemment.

$$\begin{array}{ll|l} A) & x + 4 = 7 & -4 \\ \Leftrightarrow & x = 3 & \end{array}$$

$$S = \{3\}$$

$$\begin{array}{ll|l} B) & 2x = 16 & :2 \\ \Leftrightarrow & x = 8 & \end{array}$$

$$S = \{8\}$$

$$\begin{array}{ll|l} C) & 2x + 3 = 9 & -3 \\ \Leftrightarrow & 2x = 6 & :2 \\ \Leftrightarrow & x = 3 & \end{array}$$

$$S = \{3\}$$

$$\begin{array}{ll|l} D) & 4x + 3 = 7x - 2 & -3 \\ \Leftrightarrow & 4x = 7x - 5 & -7x \\ \Leftrightarrow & -3x = -5 & :(-3) \\ \Leftrightarrow & x = \frac{5}{3} & \end{array}$$

$$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

Distributivité

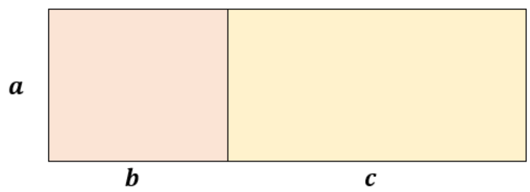
La distributivité est une propriété qui permet à une opération, en principe la multiplication, de se distribuer sur les termes d'une expression.

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Dans ce cas précis, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

<u>Illustration</u>

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c)} \qquad = \qquad \boldsymbol{a \cdot b + a \cdot c}$$



Les deux manières de calculer l'aire totale de cette surface sont équivalentes.

A gauche, nous avons multiplié la largeur du rectangle $\boldsymbol{a}$ par sa longueur $\boldsymbol{a + b}$.

A droite, nous avons décidé d'additionner deux surfaces données par $\boldsymbol{a \cdot b}$ et $\boldsymbol{a \cdot c}$.

<u>Exemples</u> (équations utilisant la distributivité)

$$
\begin{array}{ll|l}
\boldsymbol{A)} & \boldsymbol{3(x+2) = 5} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{3x + 6 = 5} & \boldsymbol{-6} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{3x = -1} & \boldsymbol{:3} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{x = -\frac{1}{3}} &
\end{array}
$$

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

$$
\begin{array}{ll|l}
\boldsymbol{B)} & \boldsymbol{3 - 2(x-1) = 3} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{3 - 2x + 2 = 3} & \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{-2x + 5 = 3} & \boldsymbol{-5} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{-2x = -2} & \boldsymbol{:(-2)} \\
\Leftrightarrow & \boldsymbol{x = 1} &
\end{array}
$$

$$S = \{1\}$$

Nous pouvons égalons être confronté à des équations plus complexes, faisant intervenir des fractions par exemple.

$$\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-1}{2}=\frac{1}{4}$$

L'une des techniques les plus efficaces consiste à mettre chaque fraction sur un dénominateur commun. Nous obtenons ainsi une équation équivalente de la forme :

$$\frac{8x-4}{12}+\frac{18x-6}{12}=\frac{3}{12}$$

Comment pourrions-nous, à partir de cette équation, éliminer le dénominateur commun ?

En multipliant tous les termes par 12.

Nous obtenons ainsi une équation basique à résoudre et l'utilisation des deux règles d'équivalence introduites précédemment peut nous permettre de conclure en un résultat.

$$\begin{array}{rl|l}
 & \frac{8x-4}{12}+\frac{18x-6}{12}=\frac{3}{12} & \cdot 12 \\
\Leftrightarrow & 8x-4+18x-6=3 & \\
\Leftrightarrow & 26x-10=3 & +10 \\
\Leftrightarrow & 26x=13 & :26 \\
\Leftrightarrow & x=\frac{13}{26} & \\
\Leftrightarrow & x=\frac{1}{2} &
\end{array}$$